EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

42e JAARGANG 1966/1967

VI — 1 MAART 1967

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

PAPY, MATHÉMATIQUE MODERNE 5

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Oosterbeek

De lezer, die meent tekort gekomen te zijn, omdat de delen 3 en 4 nog niet in Euclides besproken zijn, kan ik gerust stellen. Deze delen zijn nog niet verschenen, maar zijn in voorbereiding. Deel 5 geeft een samenvatting van al datgene, dat in de loop van de jaren aangaande de algebra behandeld wordt. Daarbij wordt als voorkennis ondersteld de inhoud van deel 1. Men dient dus te weten, dat de gehele getallen een totaal geordende euclidische ring vormen (dus dat voor elke $a \in Z$ en $0 < b \in Z$ eenduidig $q \in Z$ en $r \in Z$ bepaald zijn zo, dat $a = bq + r$ en $0 \leqq r < b$).

Het werk beslaat 280 blz. Het is verdeeld in vijf onderdelen, genaamd boek 1 t.m. boek 5. We zullen deze vijf onderdelen afzonderlijk bespreken.

Boek 1 behandelt de combinatoriek. Het boek is bestemd voor leerlingen van 14 à 15 jaar. De schrijver brengt de combinatorische problemen zoveel mogelijk in verband met afbeeldingen. Als eerste probleem wordt behandeld het aantal afbeeldingen van een verzameling A in een verzameling B. Zijn A en B eindige verzamelingen, dan blijkt dat $\#(B^A) = \#B^{A\#}$ (het teken $\#$ betekent: cardinaalgetal). Door een verzameling E af te beelden in $\{0, 1\}$ vinden we dan bij eindige verzamelingen, dat $\#\mathscr{P}E = 2^{E\#}$ ($\mathscr{P}E$ betekent: de verzameling van de deelverzamelingen van E).

Het aantal injecties van een eindige verzameling A met cardinaalgetal a in een eindige verzameling B met cardinaalgetal b blijkt nu te zijn

$$b(b - 1)(b - 2) \ldots (b - a + 1).$$

Als bijzonder geval van deze formules verkrijgen we, dat het aantal permutaties (injecties in zichzelf) van een verzameling van n elementen gelijk is aan $n!$. Heeft de verzameling 0 elementen, dan is dit aantal $0! = 1$.

Het aantal injecties van een verzameling van 3 elementen in een verzameling van 7 elementen bedraagt $7 \cdot 6 \cdot 5$. Dit aantal is gelijk aan het produkt van

[1]) Voor een bespreking van de inhoud van deel 1 en deel 2 zie resp. Euclides **39**, VIII, p. 237—246 en **42**, III, p. 90—94.

het aantal deelverzamelingen met 3 elementen van een verzameling met 7 elementen en

het aantal permutaties van een verzameling met 3 elementen.

Waaruit volgt, dat

$$\binom{7}{3} = 7 \cdot 6 \cdot 5/3!.$$

De algemene formule voor $\binom{n}{p}$ wordt analoog gevonden. Als bijzonder geval blijkt nu direct, dat $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ en $p > n$ $\Rightarrow \binom{n}{p} = 0$.

Het spreekt wel vanzelf, dat hierbij aansluit de behandeling van de binomiumformule en van de driehoek van Pascal.

Deze behandeling van de combinatoriek is de meest smakelijke, die ik ooit gezien heb.

Boek 2 behelst de rekenkunde van de gehele getallen. Het is bestemd voor leerlingen van 15 jaar. Eerst wordt een definitie gegeven van een moduul:

als $a_1, a_2, \ldots, a_n \in Z$, dan is mod$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de verzameling van de lineaire combinaties $a_1' a_1 + \ldots + a_n' a_n$ van $a_1, \ldots, a_n$ met coëfficiënten in Z.

Nu wordt de voor het vervolg fundamentele stelling bewezen: mod P is de kleinste ondergroep van Z, $+$, die P bevat. In het bijzonder geldt voor elke $k \in Z$, dat mod k (verkorte schrijfwijze voor mod$\{k\}$) de verzameling van de veelvouden van k is, dus de verzameling $\{kz | z \in Z\}$; ook kort genoteerd: kZ.

Verder blijkt nu:

als S een ondergroep is van Z, $+$, dan is er precies één natuurlijk getal n, waarvoor geldt $S = \text{mod } n$;

als P een (eindige) deelverzameling van Z is, dan is er precies één natuurlijk getal n, waarvoor geldt mod P = mod n.

Het in deze laatste uitspraak gevonden getal schrijven we $\wedge P$; het zal blijken de g.g.d. van de elementen van P te zijn.

Hierna wordt de relatie $a|b$ (a is deler van b) op de gebruikelijke manier gedefinieerd. De theorie van de deelbaarheid wijkt slechts in de vorm van presentatie van de gebruikelijke af. Er blijkt bij het ontwikkelen van deze theorie, dat elke gemeenschappelijke deler van de elementen van P deler van $\wedge P$ is, zodat achteraf $\wedge P$ inderdaad de g.g.d. van de elementen van P blijkt te zijn.

Uit het voorgaande volgt:

de g.g.d. van a en b is gelijk aan $1 \Leftrightarrow \exists p, q \in Z$, waarvoor $pa + qb = 1$.

Nu volgt de theorie van het k.g.v.:

voor elke $a, b \in Z$ geldt: $aZ \cap bZ$ is een ondergroep van $Z, +$. Dus is er precies één natuurlijk getal, genoteerd $a \vee b$, waarvoor

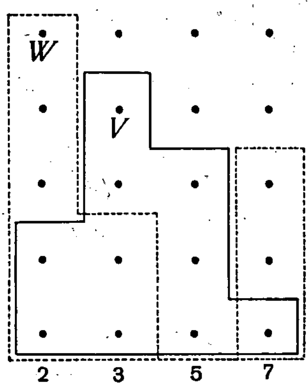
$$aZ \cap bZ = (a \vee b)Z.$$

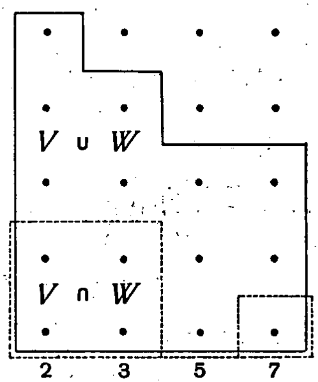
Dit getal is het k.g.v. van a en b.

Hierna volgt het bewijs van de eenduidige ontbindbaarheid in priemfactoren van een natuurlijk getal. Daarbij sluit aan een methode om g.g.d. en k.g.v. te vinden. Hieronder zijn de getallen

$$a = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \text{ en } b = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^3$$

in correspondentie gebracht met twee verzamelingen V en W (links). Verder zijn in correspondentie gebracht de g.g.d. en het k.g.v. van a en b met resp. $V \cap W$ en $V \cup W$ (rechts).





Uit deze diagrammen leidt de schrijver een isomorfie af tussen

$$\omega, \wedge, \vee, | \text{ en } \Phi, \cap, \cup, \subset$$

(ω stelt voor de vereniging van de natuurlijke getallen en $\{0\}$, Φ de verzameling van alle mogelijke verzamelingen V en W; met 0 correspondeert de alverzameling).

Uit deze isomorfie volgt:

in $\omega, \wedge, \vee$ zijn $\wedge$ en $\vee$ commutatief, associatief en wederzijds distributief,

0 is neutraal element voor $\wedge$ en absorberend element voor $\vee$,

1 is neutraal element voor $\vee$ en absorberend element voor $\wedge$.

Verrassend is hier de gemakkelijk begrijpbare manier, waarop Papy een isomorfie naar voren weet te brengen en er zo conclusies uit weet te trekken, dat het grote belang van isomorfieën daardoor duidelijk wordt.

In het derde boek worden de resultaten en methoden uit boek 2

gegeneraliseerd voor willekeurige rationale getallen. De schrijver vermeldt, dat hij de behandeling van de stof uit dit boek facultatief acht. De generalisatie vindt zijn oorsprong in de omstandigheid, dat elk rationaal getal eenduidig in priemfactoren met gehele exponenten ontbonden kan worden. Deelbaarheid, g.g.d., k.g.v. en de resultaten van boek 2 laten zich dan gemakkelijk vertalen. Dit boek lijkt me voor een leerling alleen dan interessant, als het zeer kort samengevat wordt.

Boek 4 is getiteld: commutatieve ringen en lichamen. Het is bestemd voor leerlingen van 16 jaar.

Het boek begint met de behandeling van de restklassen modulo n (notatie: Z_n) en het bewijs, dat deze een commutatieve ring vormen voor elke natuurlijke $n > 1$. Deze ring heeft wel of geen nuldelers al naarmate n niet of wel priem is.

$K, +, \cdot$ is een lichaam betekent: $K, +, \cdot$ is een commutatieve ring en $K_0, \cdot$ is een groep, waarin $K_0 = K \setminus \{0\}$.

En dus is Z_n voor n priem een lichaam en voor n niet priem geen lichaam.

De elementen van het lichaam Z_p (p priem) worden genoteerd: $\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}$. Nu wordt bewezen de hulpstelling $\overline{\binom{p}{k}} = \bar{0}$. Uit deze hulpstelling volgt:

$$(\bar{a} + \bar{b})^p = \bar{a}^p + \bar{b}^p.$$

We zien dit gemakkelijk door de binomiumformule en daarna de hulpstelling toe te passen. In het bijzonder is dus voor $\bar{x} \neq \bar{0}$

$$\bar{x}^p = (\bar{1} + \bar{1} + \ldots + \bar{1})^p = \bar{1}^p + \bar{1}^p + \ldots + \bar{1}^p = \bar{x},$$
$$\bar{x}^{p-1} = \bar{1},$$

waarmee de kleine stelling van Fermat bewezen is.

De leerling heeft nu met verschillende ringen kennis gemaakt, t.w. $Z, +, \cdot$; $Z_n, +, \cdot$; $\mathscr{P}E, \triangle, \cap$ en met verschillende lichamen, t.w. $R, +, \cdot$; $Q, +, \cdot$; $Z_p, +, \cdot$ (p priem). Er is nu dus alle aanleiding een algemene theorie te geven van een commutatieve ring met eenheidselement en van een lichaam. We vinden, dat 0 neutraal element voor de optelling en absorberend element voor de vermenigvuldiging is en ontdekken de tekenregels voor de vermenigvuldiging. Daarna wordt de scalaire vermenigvuldiging van de elementen van een willekeurige ring met de elementen van Z gedefinieerd volgens:

$$ma = a + a + \ldots + a \text{ (m termen) (m natuurlijk)}$$
$$0a = 0$$
$$(-m)a = -(ma).$$

We vinden dan enkele associatieve eigenschappen.

In een lichaam blijken geen nuldelers te zijn. Er laat zich een machtsverheffing definiëren met gehele exponenten en hiervoor kan men de gebruikelijke eigenschappen bewijzen.

Als voorbeeld van een ring wordt nu behandeld de ring van de afbeeldingen van een ring in een ring. Noem deze ringen A en B. De ring van de afbeeldingen is dan: B^A, $+$, $\cdot$, waarbij

$$f + g : x \to (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$f \cdot g : x \to (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

waarin f en g afbeeldingen van A in B zijn.

Dit is meteen een voorbereiding voor het speciale geval, dat de functies polynomen zijn. De verzamelingen van de polynoomfuncties, die ring A afbeelden in zichzelf, is weer een ring.

Nu wordt bewezen:

$$x - a \mid f \Leftrightarrow f(a) = 0.$$

Hieruit volgt, dat het aantal wortels van een polynoom van de graad n hoogstens n is, als de ring een lichaam is. Als twee polynomen van de graad n voor $n + 1$ waarden van het argument aan elkaar gelijk zijn, hebben ze dus dezelfde coëfficiënten. In Z_p, $+$, $\cdot$ is elk polynoom te schrijven in de vorm $a_{p-1}x^{p-1} + \ldots + a_0$ en dus op slechts één manier.

Nu wordt het theorema van Wilson bewezen:

$$n \text{ priem} \Rightarrow \overline{(n - 1)!} = -\bar{1}.$$

Het bewijs is leuk: uit Fermat volgt, dat de wortels van $x^{n-1} - \bar{1}$ zijn $\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{n - 1}$. Dus is

$$x^{n-1} - \bar{1} = (x - \bar{1})(x - \bar{2}) \ldots (x - \overline{n - 1}).$$

Substitutie $x = 0$ levert nu het theorema.

Het is duidelijk, dat

$$n \text{ niet priem} \Rightarrow \overline{(n - 1)!} = \bar{0},$$

omdat de ring Z_n dan nuldelers heeft.

Het laatste boek gaat over groepen en eindige lichamen. Het is bestemd voor leerlingen van 17 à 18 jaar.

De eigenschappen van nevenklassen van een element van een groep komen eerst in behandeling. (Over normale delers wordt niet gesproken.) De orde van een ondergroep van een eindige groep blijkt dan een deler van de orde van de groep te zijn. De gehele

machten van een element g van de groep G is de kleinste ondergroep van G, die g bevat. De orde van een element van een eindige groep is dus een deler van de orde van de groep. De groepen bestaande uit de gehele machten van g blijken isomorf te zijn met $Z, +$ of met $Z_n, +$.

Nu vinden we op verrassend korte manier de volgende stelling: elke transformatie van $Z_p, +, \cdot$ (p priem) is te schrijven in de vorm:

$$f = a_{p-1}x^{p-1} + \ldots + a_0.$$

Bewijs. Er zijn p^p verschillende transformaties van Z_p. Er zijn p^p verschillende functies van de vorm f. Twee verschillend geschreven functies van de vorm f leveren verschillende transformaties. Hiermee is het bewijs voltooid.

Ten slotte de eindige lichamen. Hier wordt eerst een methode behandeld om een lichaam uit te breiden. Als voorbeeld wordt genomen het lichaam $Z_3, +, \cdot$. Men leidt hier een nieuw lichaam uit af, waarvan de elementen zijn $a + bi$ ($a, b \in Z_3$) en waarin optelling en vermenigvuldiging gedefinieerd zijn volgens

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Zo ontstaat dan een lichaam met 9 elementen.

Ten slotte wordt de volgende interessante stelling bewezen:

in een eindig lichaam is de multiplicatieve groep cyclisch,

het produkt van alle elementen, die niet 0 zijn, is gelijk aan -1,

als het aantal elementen van het lichaam q is, dan geldt voor elke $x \neq 0$: $x^q = x$,

elke transformatie van een eindig lichaam kan voorgesteld worden door een polynoom functie.

De tweede en de derde uitspraak uit deze stelling doen denken aan de theorema's van Wilson en van Fermat. Deze worden bij hun bewijs dan ook gebruikt.

Het gehele werk maakt een veel betere indruk dan ik in dit korte overzicht naar voren kon doen komen. De stofkeuze is zo, dat de leerling op betrekkelijk eenvoudige wijze kennis maakt met fundamentele gebieden uit de algebra en bovendien de samenhang tussen deze gebieden leert zien. De presentatie is, zoals steeds, van een verrassende helderheid.

Ieder, die belangstelling heeft voor moderne ontwikkelingen in de wiskunde en in het onderwijs in de wiskunde, kan ik de lectuur van dit boek met de meeste nadruk aanbevelen.

HET EXPERIMENT PAPY

door

Dr. P. J. G. Vredenduin

Oosterbeek

Het experiment Papy in België nadert zijn voltooiing. In ons land begint zich langzamerhand duidelijker de richting af te tekenen, die de modernisering van ons wiskunde-onderwijs zal inslaan. Dit lijkt mij voldoende reden om op het werk van Papy eens nader in te gaan.

Het experiment Papy is thans zo ver gevorderd, dat er een eerste klasse (d.i. een examenklasse) is, die geheel volgens de opvattingen van het echtpaar Papy heeft les gehad en deze zomer volgens dit programma geëxamineerd zal worden. Bovendien is vastgesteld, dat in september 1968 het nieuwe programma op de scholen ingevoerd zal worden, aanvankelijk natuurlijk alleen voor de zesde klasse, en het ziet er naar uit, dat dit nieuwe programma volgens de inzichten van Papy zal zijn samengesteld [1]).

Velen in ons land zouden dit programma niet gaarne overnemen. Laat ik dus eerst vertellen, hoe men in België erover denkt en dan de Belgische inzichten met de onze trachten te vergelijken. Met verscheidene vooraanstaande Belgische collega's, op wier oordeel ik veel prijs stel, heb ik over het programma gesproken. Steeds weer kwam ik tot de overtuiging, dat zij er geheel achter staan. Velen hebben met onderdelen van het programma geëxperimenteerd en hebben daarbij gunstige ervaringen opgedaan. Op 1 december j.l. is door het Belgisch Centrum voor Metodiek van de Wiskunde een conferentie in Brussel georganiseerd onder voorzitterschap van Papy, waar dertien sprekers een korte voordracht hielden. Het thema van het congres was: La réforme est en marche. De belangstelling was overweldigend: 1700 Belgische leraren, uiteraard niet alleen van het „vhmo", waren aanwezig. Bij deze gelegenheid werd o.a. het woord gevoerd door Mevrouw Papy. Zij zette uiteen, hoe het programma was voor de tweede en eerste klassen. Duidelijk bleek toen, dat het

[1]) Na het schrijven van dit artikel is een commissie ingesteld door het ministerie om nog eens na te gaan, of het wenselijk is de vernieuwing in 1968 op deze wijze door te voeren.

einddoel van het Belgische onderwijs volgens de nieuwe methode niet van principieel andere aard is dan het doel, dat ons in Nederland voor ogen staat. Het is interessant voor de Nederlandse lezer van dit einddoel kennis te nemen. Aan het eind van dit artikeltje zijn daarom toegevoegd de opgaven van het kerstexamen, zoals deze opgegeven zijn aan de eerste klasse. De uitgewerkte oplossingen zijn bijgevoegd, alsmede een lijst van de onderwerpen, die in het eerste trimester van de eerste klasse behandeld zijn. De lezer kan zich zo een duidelijk beeld vormen van het einddoel van de Belgische vernieuwing.

Natuurlijk is er wel verzet geweest tegen de methode Papy. De enorme werkkracht, het doorzettingsvermogen en het organisatietalent van Papy hebben de tegenstanders de moed in de schoenen doen zinken. Dit gevoegd bij het feit, dat Mevrouw Papy een begaafd docente is, die aan de ideeën van haar man didactisch verantwoorde vorm heeft weten te geven, maakt het klimaat voor het slagen van hun experiment gunstig.

Laten we nu naar het eigen land terugkeren. Allereerst moeten we de urentabel van België met de onze gaan vergelijken. Welnu, in België is het aantal voor wiskunde beschikbare uren $4 + 4 + 4 + 7 + 7 + 7 = 33$. In ons land $4 + 4 + 4 + (2 + 3) + 3 + 3 = 23$. Eventueel vermeerderd met $3 + 3$ in de bovenbouw voor degenen, die wiskunde II volgen, maar voor hen zal een afzonderlijk supplementair programma opgesteld moeten worden. Dan moeten we nog met twee bijzonderheden rekening houden. De eerste is, dat de 3 uur in klasse 4, ten gevolge van de inrichting van onze urentabellen, niet onmisbaar mogen zijn voor degenen, die in de vijfde en zesde klasse wiskunde I volgen. En dan nog zullen van deze 6 uren wiskunde I in de bovenbouw er vermoedelijk 2 gereserveerd worden voor waarschijnlijkheidsrekening en eenvoudige toepassingen. Een normaal wiskunde-programma, dat uitmondt in wiskunde I, zal dus bestaan uit 18 uur + een zijtak van 3 uur + 2 uur toegepaste wiskunde. Hiermee is meteen duidelijk, dat een programma, zoals in België voorgesteld wordt, op onze scholen met geen mogelijkheid uitgevoerd zal kunnen worden, althans naar de omvang.

Laten we nu trachten na te gaan, in hoeverre de opvattingen in ons land van die van Papy verschillen. Ik moet daarbij wel voorzichtigheidshalve opmerken, dat men niet kan spreken van *de* opvattingen in ons land. Maar ik geloof toch wel zo ongeveer te kunnen opgeven, wat de bezwaren zijn, die men hier tegen de methode Papy heeft.

a. In het vroegere wiskunde-onderwijs werden theoretisch vaak resultaten afgeleid op een methode, die de toets van de kritiek uit een oogpunt van wiskundige strengheid niet kon doorstaan. Het kunnen gebruiken van de resultaten om vraagstukken te maken werd veelal van groter belang geacht dan het op wiskundig verantwoorde manier funderen van de resultaten.

Papy stelt hier tegenover een maximale strengheid te willen bereiken. Elk resultaat, dat op strenge wijze verkregen kan worden zo, dat het ook door leerlingen begrepen wordt, moet ook streng worden gefundeerd. In zijn boeken zal men dan ook zeer weinig hiaten in de bewijsvoering tegenkomen. Men vindt geen axiomatische fundering van het natuurlijk getal; hier heeft de schrijver concessies aan de intuïtie gedaan. Maar in de meetkunde worden intuïtief verkregen resultaten samengevat in axioma's, zodat de bewijsvoering, zelfs t.a.v. ordeningsproblemen, streng wordt. Ook het reële getal wordt op geheel verantwoorde wijze (vgl. M.M. 2) ingevoerd.

Ik geloof, dat men in ons land de strengheid wel wenst te bevorderen, maar niet zo tot het uiterste wenst op te voeren. Men is voorstander van een intuïtieve inleiding in de meetkunde. Hoewel men wel meer aandacht dan totnogtoe zal willen besteden aan de invoering van het reële getal, zal men de intuïtie hier de nodige aanvullingen laten leveren.

b. De mathematische structuren spelen tegenwoordig een veel grotere rol dan vroeger. Dit leidt tot unificatie van het wiskundig denken. Zodra men in een of ander gebied van de wiskunde een bepaalde structuur ontdekt, voelt men zich thuis. Men weet dan meteen, dat alle eigenschappen van die structuur zich in het betrokken gebied voordoen. Dit brengt Papy ertoe van meet af aan diep in te gaan op de structuur van de wiskundige systemen. Heel duidelijk is de draagwijdte daarvan zichtbaar in het fraaie M.M. 5.

In ons land leeft stellig de wens dieper in te gaan op de structuur van de getallensystemen. Helaas ontbreekt de tijd om aan een verscheidenheid van voorbeelden het belang te demonstreren van structuren als ring, lichaam, groep. En als men niet laat zien, wat de betekenis van een abstracte structuur is, heeft de behandeling ervan weinig zin meer. Dientengevolge kan ook aan homomorfismen geen aandacht geschonken worden en mogen we ons gelukkig prijzen als we kans zien de leerling iets van het belang van isomorfismen bij te brengen.

c. Nu volgt het meest tere punt. Papy wordt vaak verweten, dat hij de techniek verwaarloost. Evident is, dat in ons huidige onder-

wijs vaak kritiekloos techniek beoefend wordt en dat zeker een deel van de hieraan bestede tijd een beter doel waardig is. Anderzijds is evenzeer evident, dat men mathematische techniek nodig zal blijven hebben en dat eenvoudig rekenwerk voor niemand, die wiskunde nodig heeft, enige moeilijkheid mag opleveren. Training is dus beslist vereist. Ik heb dan ook niet nagelaten met Belgische collega's hierover van gedachten te wisselen. Enkele antwoorden wil ik hier vermelden.

Het geringe aantal oefeningen in eenvoudig algebraïsch rekenwerk, dat in M.M. 1 voorkomt, achtte men niet verontrustend. Allereerst vond men het niet noodzakelijk zich tot een dergelijk klein aantal opgaven te beperken. Iedere leraar, die meer opgaven wenselijk acht, kan er meer geven.

En verder: waaruit bestaat het algebraïsche rekenwerk in hoofdzaak? Het zijn toch immers steeds weer toepassingen van de distributieve eigenschap. En onze (de Belgische) leerlingen zijn doorkneed in het toepassen van de distributieve eigenschap (ik weet uit ervaring, dat dit inderdaad zo is). Alleen leren zij de distributieve eigenschap vanuit meer algemeen standpunt en kunnen hem dan zonder moeite op allerlei bijzondere gevallen (getallen, vectoren, verzamelingen) toepassen.

En het wegwerken van haakjes, zoals in $a - (b - c) = a - b + c$? Wel, ook dat leren onze leerlingen vanuit algemener standpunt bezien. Ze weten, hoe men met inverse bewerkingen opereert. De genoemde herleiding is een bijzonder geval van: $(h^{-1} \circ g)^{-1} \circ f = h \circ g^{-1} \circ f$. Men kan dit ook toepassen bij de deling, bij het samenstellen van functies of transformaties, e.d.

d. In de meetkunde interesseert men zich bij het huidige vhmo in eerste instantie voor de eigenschappen van individuele figuren, b.v. van driehoeken, parallellogrammen, cirkels. De ontwikkeling van de lineaire algebra heeft ertoe geleid, dat in de meetkunde de algemene structuur het fundamenteel belangrijke is geworden. De axioma's van Hilbert hebben plaats gemaakt voor de axioma's van de lineaire ruimte. Daarmee gaat gepaard een verflauwing van de interesse voor de driehoek, de congruentiegevallen, de speciale soorten vierhoeken, enz. Hiervoor komt in de plaats belangstelling voor relaties als loodrecht en evenwijdig, transformaties en groepen daarvan, ekwivalentierelaties zoals gelijke richting, congruent, gelijkstandig (in ruime zin), gelijkvormig, affien.

In ons land zijn velen voor een intuïtieve kennismaking met meetkundige figuren in de brugklasse, waarna in de onderbouw van het vwo nader op meetkundige structuren kan worden ingegaan. An-

deren willen in de brugklasse reeds zo spoedig mogelijk het accent leggen op de transformaties. De vraag is, of uit een oogpunt van behoefte van hen, die later meetkunde toepassen, de driehoek wel zo verfoeilijk is als sommigen tegenwoordig menen.

e. Meer en meer is men gaan inzien, dat een goed gebruik van symboliek in de wiskunde verhelderend is. Bovendien dwingt het gebruik van adequate symboliek de gebruiker vaak zijn gedachten zeer nauwkeurig te formuleren en kan men gebrek aan denkscherpte voor zichzelf en voor anderen niet langer camoufleren door gebruik van een omhaal van woorden. Papy is dan ook zeer ver gegaan in het gebruik van symbolen. Zijn betogen worden daardoor uitermate helder en doorzichtig.

Daartegenover staat, dat voor de leerling het gebruik van symbolen soms een extra belasting met zich meebrengt. Het goed hanteren van een veelheid van symbolen maakt vaak, dat men alleen aan het correct schrijven van de symbolen te veel energie moet besteden, waardoor het denkwerk verzwaard wordt.

Het spreekt vanzelf, dat de waarheid in het midden ligt en dat men zal moeten uitvinden, waar „de afgeleide 0 is". Het komt me voor, dat de symboliek van Papy zo ver doorgevoerd is, dat het voor de geschoolde lezer zeker verhelderend is, dat het voor de leerling ook nog verhelderend zal werken, maar dat het voor de leerling een belasting gaat vormen, als hij deze symboliek zelf moet hanteren.

Toch geloof ik, dat we, willen we tot doelmatige hervorming komen, ons voor een goed deel zullen moeten aansluiten bij zijn perfectionering van het gebruik van symbolen bij het onderwijs.

Samenvattend kan men zeggen, dat op het huidige onderwijs in de wiskunde veel aan te merken is en dat Papy hier zich terecht tegen teweer gesteld heeft. Hij heeft tegenover de gesignaleerde tekortkomingen van de huidige methode telkens een standpunt ingenomen, dat zo extreem mogelijk het tegengestelde beoogt. Elk compromis wijst hij af. Daarin ligt zijn kracht enerzijds, maar dit maakt hem anderzijds kwetsbaar. Het maakt het lezen van de boeken van hem en zijn vrouw tot een genot. Ieder, die de modernisering in Nederland ziet aankomen met enige angst, omdat hij zich niet thuis voelt in de moderne gedachtengang en er graag op gemakkelijk begrijpbare wijze iets van te weten wil komen, kan ik geen betere raad geven dan: lees Mathématique Moderne, eerst 1 en 5, en daarna ook 2.

Anderzijds maakt het extreme van het standpunt Papy ons iet-

wat huiverig. We willen graag moderniseren en zien de noodzaak daarvan in. Maar we zijn bevreesd te veel oude schoenen weg te gooien. Ik wil niet nalaten eraan toe te voegen, dat ook bij mij deze vrees leeft. De toekomst zal leren, wie gelijk heeft.

Hieronder volgt, met toestemming van Mevrouw Papy, het door haar gegeven examenwerk. Ik zou hierover enkele opmerkingen willen maken. De lezer zal zien:

a. dat het werk een meer theoretische inslag heeft dan wij dat gewend zijn,

b. dat zonder twijfel hier alleen problemen aan de orde zijn, die wiskundig belangrijk zijn (en niet problemen, die zo aardig zijn, omdat ze zo'n geschikte toetsingsmogelijkheid bieden, maar die in wezen onnatuurlijke situaties bevatten),

c. dat iemand, die dit werk kan maken, stellig moet voldoen aan de eis, dat hij eenvoudig wiskundig rekenwerk goed kan verrichten.

EXAMEN DE MATHÉMATIQUE

Classe de 1ère Latin-Mathématique

1. Voici la fonction $f \subset R \times R$ définie par

$$f(x) = \log_e(x^2 + 2x - 8)$$

dom $f =$

Etudier la variation de la fonction f

2. Appelons A un voisinage ouvert de $a \in R$

Si $f : A \to R$ admet en tout point de A une dérivée d'ordres $1, 2, \ldots, n$ (avec $n \geqq 3$)

$f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$

$f^{(n)}(a) \neq 0$; $f^{(n)}$ continue en a

Alors n impair $\Rightarrow$ $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de f

n pair $\Rightarrow$ la tangente en $(a, f(a))$ ne traverse pas le graphe de f

(Démontrer cette proposition)

Application

Le graphe de $f : R \to R : x \to x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 36x - 15$ admet-il des points d'inflexion?

3. Voici $f : [ab] \to \mathbf{R}$ continue
   Qu'entend-on par $\int_a^b f \, dx$?

4. Dans le vectoriel $\mathscr{C}_{[ab]}$ des applications continues $[ab] \to \mathbf{R}$ montrer que $\mathscr{C}_{[ab]} \times \mathscr{C}_{[ab]} \to \mathbf{R}$: $(f, g) \to (f \mid g) = \int_a^b f \cdot g \, dx$ est un produit scalaire euclidien.
   En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'intégrale des fonctions continues sur $[ab]$

5. Calculer

$$\int_{-1}^{2} (\tfrac{2}{3}x^7 - 5x^5 + x^3 - x + 2) dx$$

$$\int_0^2 a^x \, dx$$

$$\int_a^b x^m \, dx \quad (a, b, m \in \mathbf{R})$$

$$\int_1^2 \log_a x \, dx$$

$$\int_0^1 t^2 e^t \, dt$$

6. Démontrer que

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$$

7. Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

8. Dans l'espace E_0 muni de la base $\vec{e} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$

   voici les points $\vec{u} = (-1; 0; 3)$
   $\vec{v} = (2; -1; 0)$
   $\vec{w} = (1; 0; 0)$

   Ces points sont-ils alignés?
   Dans l'éventualité où ces points ne sont pas alignés, écrire l'équation du plan comprenant $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

9. Toute transformation linéaire d'un vectoriel réel de dimension n admet au plus n valeurs propres distinctes.
   Toute transformation linéaire d'un vectoriel de dimension impaire admet au moins une valeur propre

SOLUTION

1. $x \in \operatorname{dom} f \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 > 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+4) > 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x - 2 > 0 \\ \text{et} \\ x + 4 > 0 \end{array}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{array}{c} x - 2 < 0 \\ \text{et} \\ x + 4 < 0 \end{array}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x > 2 \quad \text{ou} \quad x < -4$$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}\backslash[-4; 2] =]-\infty; -4[\, \cup\,]2; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x-8}$$

$\forall\, x \in \operatorname{dom} f$: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$

Concluons:

Pour tout réel $x > 2$: $f'(x) > 0$
Donc $f_{|]2;+\infty[}$ strictement croissante
Pour tout réel $x < -4$: $f'(x) < 0$
Donc $f_{|]-\infty;-4[}$ strictement décroissante

2. La démonstration de cette proposition est une application de la formule de Taylor que voici

Si $f : [ab] \to \mathbb{R}$ admet les dérivées $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$
$f^{(n-1)}$ continue en tout point de $[ab]$
dérivable en tout point de $]ab[$

Alors $\exists c \in]ab[$:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

Démonstration

$f^{(n)}$ continue en a et $f^{(n)}(a) \neq 0$
Pour fixer les idées, supposons $f^{(n)}(a) > 0$
Il existe un intervalle ouvert X de centre a, inclus dans A, tel que $f^{(n)} X \subset \mathbb{R}_0^+$ (A8, ch. 15, p. 163)

$$X =]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$$

Appliquons la formule de Taylor à

$$f_{[a,\, a+h]} \qquad \text{avec} \qquad |h| < \varepsilon$$

$\exists\, \theta \in]0;\, 1[$:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h)$$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h)$$

$$f(a+h) - f(a) - hf'(a) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h)$$

Equation de la tangente T à f au point $(a, f(a))$

$$T \equiv y - f(a) - (x-a)f'(a) = 0$$

Inéquations des demi-plans fermés de bord T

$$\overline{\Pi}_1 \equiv y - f(a) - (x-a)f'(a) \geqq 0$$
$$\overline{\Pi}_2 \equiv y - f(a) - (x-a)f'(a) \leqq 0$$

Si n est pair et $|h| < \varepsilon$

Alors $h^n \geqq 0$
$f^{(n)}(a+\theta h) > 0 \qquad (\text{car } a + \theta h \in X)$
$f(a+h) - f(a) - hf'(a) \geqq 0$
$f_{|X} \subset \overline{\Pi}_1$

Donc la tangente à f au point $(a, f(a))$ ne traverse pas f

Si n est impair et $|h| < \varepsilon$

Alors

$h \geqq 0$	$h \leqq 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$h^n \geqq 0$	$h^n \leqq 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$f(a+h) - f(a) - hf'(a) \geqq 0$	$f(a+h) - f(a) - hf'(a) \leqq 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$f_{\mid X \cap [a, +\infty[} \subset \overline{\Pi}_1$	$f_{\mid X \cap [a, +\infty[} \subset \overline{\Pi}_2$

Donc $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de f c.q.f.d.

Application

$f'\ (x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 36$
$f''\ (x) = 12x^2 - 12x - 24$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$
$f'''(x) = 24x - 12$
$f'''(2) = 36 \neq 0$; $\quad f'''(-1) = -36 \neq 0$

Donc les points $(2, f(2))$ et $(-1, f(-1))$
$(2, 9)$ et $(-1, -60)$
sont les points d'inflexion de f

3. Voici la fonction continue $f : [ab] \to \mathrm{R}$
Désignons par s la suite réelle finie strictement croissante

$$a = s_0 < s_1 < \ldots < s_i < \ldots < s_n = b$$

et par S l'ensemble de toutes les suites réelles finies strictement croissantes dont le premier terme est a et le dernier b
Appelons m_i le minimum de $f_{|[s_{i-1}, s_i]}$
m le minimum de f
M le maximum de f

Posons $\sum(s) = \sum_{i=1}^{n}(s - s_{i-1})m_i$
$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$: $m \leqq m_i \leqq M$
D'où $m(b - a) \leqq \sum(s) \leqq M(b - a)$
L'ensemble de réels

$$\{\sum(s) \mid s \in S\}$$

est non vide et borné
Il admet donc un plus petit majorant que nous appellerons *l'intégrale* définie de f sur $[ab]$ et que nous noterons

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x$$

4. Nous devons prouver que ce produit scalaire est *commutatif, bilinéaire, strictement positif.*

Commutativité $\quad \forall\, f, g \in \mathscr{C}_{[ab]}$:

$$(f|g) = \int_a^b f \cdot g\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b g \cdot f\,\mathrm{d}x$$ (commutativité de la multiplication dans l'anneau $\mathscr{C}_{[ab]}, +, .$)
$$= (g|f)$$

Bilinéarité $\quad \forall\, f, g, h \in \mathscr{C}_{[ab]}$; $\forall\, r, s \in \mathrm{R}$:

$$(rf + sg|h)$$

$= \int_a^b (rf + sg)h \, dx$

$= \int_a^b (r \cdot fh + s \cdot gh) dx$ (calcul dans l'anneau $\mathscr{C}_{[ab]}, +, .$)

$= r \int_a^b fh \, dx + s \int_a^b gh \, dx$ (linéarité de l'intégrale définie)

$+ \quad r(f|h) + s(g|h)$

Produit scalaire strictement positif

Si $0 \neq f \in \mathscr{C}_{[ab]}$

Alors f^2 est une fonction continue, positive, non nulle et

$(f|f) = \int_a^b f^2 \, dx > 0$ (positivité de l'intégrale définie des fonctions continues)

Inégalité de Cauchy-Schwarz

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée dans tout vectoriel réel muni d'un produit scalaire euclidien

Donc $\forall f, g \in \mathscr{C}_{[ab]}$:

$$(f|g)^2 \leqq (f|f) \cdot (g|g)$$

$$|(f|g)| \leqq \sqrt{(f|f)} \cdot \sqrt{(g|g)}$$

$$\left| \int_a^b fg \, dx \right| \leqq \sqrt{\int_a^b f^2 \, dx} \sqrt{\int_a^b g^2 \, dx}$$

5. Calculs classiques

6. La fonction $\exp_e$: $R \to R$ est indéfiniment dérivable. Appliquons-lui la formule de Taylor rappelée au no 2

$\forall x \in R, \exists \theta \in]0; 1[$:

$$\exp_e(x) = \exp(0) + \frac{x}{1!}\exp'(0) + \frac{x^2}{2!}\exp''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}\exp^{(n)}(0)$$
$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp^{(n+1)}(\theta x)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}$$

En particulier, pour $x = 1$

$$e = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

Posons $$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

$$e = s_n + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

$$0 < \theta < 1 \Rightarrow 1 = e^0 < e^\theta < e$$

D'où, pour tout $n \in \omega$:

$$s_n < e < s_n + \frac{e}{(n+1)!}$$

$$0 < e - s_n < \frac{e}{(n+1)!}$$

Or, $\lim \frac{e}{(n+1)!} = 0$

Donc $\lim(e - s_n) = 0$

Autrement dit $e = \lim s_n$ c.q.f.d.

7. Le rang d'une matrice est la dimension du vectoriel engendré par ses lignes (ou par ses colonnes)

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

det $a = 0$

Donc $\rho(a) \neq 3$

La suite $(1 \quad 2 \quad 3), \quad (4 \quad 5 \quad 6)$ est libre

Donc $\rho(a) \geqq 2$

Concluons: $\rho(a) = 2$

8. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ non alignés

ssi

$\vec{v} - \vec{u}, \vec{w} - \vec{u}$ est une suite libre

$\vec{v} - \vec{u} = (3; -1; -3)$; $\vec{w} - \vec{u} = (2; 0; -3)$

$\vec{v} - \vec{u}, \vec{w} - \vec{u}$ est une suite libre

Donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas alignés

Equation du plan comprenant $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Développons ce déterminant selon la quatrième ligne

$$-\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-(3x_2 - x_3 + 3) + (6x_2 + x_3 + 3x_1) = 0$$

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3 = 0$$

9. Dans le vectoriel réel de base $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$, voici la transformation linéaire t de matrice

$$t_e = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ \vdots & & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

λ est une valeur propre de t

ssi

λ est racine de l'équation caractéristique de t

ssi

$$\begin{vmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} - \lambda & \ldots & t_{2n} \\ \vdots & & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

L'équation caractéristique de t est une équation de degré n à coefficients réels

Or toute équation de degré n à coefficients réels admet au plus n racines réelles ([MM5], ch. 9, th. 3, p. 219)

toute équation de degré impair à coefficients réels admet au moins une racine réelle (A8, ch. 15, p. 171)

Bibliographie

[MM5] PAPY Mathématique moderne 5, Editions Didier, Bruxelles, Montréal, Paris, 1966

[A8] PAPY Premières leçons d'analyse mathématique par Frédérique, Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique, Bruxelles, 1966

Liste des matières vues pendant le premier trimestre de l'année académique 1966-1967

Analyse

Image d'un segment fermé de R par une application continue dans R

Théorème de Rolle
Formule des accroissements finis
Formule de Taylor—MacLaurin

Représentations graphiques cartésiennes des fonctions de R vers R: maximum - minimum - point d'inflexion - intervalles de croissance, de décroissance - etc. (On utilisera les dérivées et la formule de Taylor)

Problèmes de minimum et de maximum

Dérivées et fonctions constantes
Primitives

Intégrale définie des applications continues d'un segment de R dans R
Définition de l'intégrale comme borne supérieure à partir d'une notion intuitive d'aire
Intégrale et primitive
Linéarité
Positivité et les inégalités qui en découlent
Le produit scalaire $(f|g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$
Inégalité de Cauchy-Schwarz
Intégration par parties
Intégration par „changement de variable"

Fonctions en escalier
Algèbre des fonctions en escalier d'un segment de R dans R
Intégrale définie des fonctions en escalier d'un segment de R dans R
Linéarité
Positivité et les inégalités qui en découlent
Le produit scalaire $(f|g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$
Inégalité de Cauchy-Schwarz

La fonction f: $R_0^+ \to R$ définie par

$$\forall\, x \in R_0^+ : f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

est une fonction logarithme; sa base est appelée e

Etablir la formule $e = \lim\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$

Calcul d'une valeur approchée de e
Dérivées des fonctions logarithmes et exponentielles
Dérivées de $f : \mathrm{R}_0^+ \to \mathrm{R} : x \to x^a$ $(a \in \mathrm{R})$

Systèmes d'équations linéaires - matrices - déterminants

Le vectoriel des équations linéaires à n inconnues et le sous-vectoriel des équations homogènes associées
La solution d'un système d'équations linéaires homogènes à n inconnues est un sous-vectoriel de $\mathrm{R}^{n\times 1}$
Résolution d'un système d'équations par la méthode de Gauss
Rang d'un système d'équations linéaires
Rang d'une matrice
Système d'équations linéaires et rang de la matrice associée
Système de Cramer
Développement d'un déterminant suivant une ligne
Matrice inversible et calcul de son inverse

Vectoriels réels de dimension 2 *et* 3

Valeurs propres et vecteurs propres d'une transformation linéaire
Eléments de géométrie à 2 et 3 dimensions

ONTVANGEN BOEKEN

D. Leujes, *Planimetrie* voor V.H. en M.O., deel I, 4e druk, f 3.40, *Planimetrie* voor V.H. en M.O., deel II, 2e druk, f 4.80, J. Noorduyn en Zoon N.V. — Gorinchem — 1966.

Dr. W. J. Bos, *Grondslag voor meetkunde*, deel II, J. M. Meulenhoff, Amsterdam, 1966, 118 blz., ingen. f 6,25
Opzet en indeling wijken weinig af van *Wegwijzer 2*. De auteur noemt het een verkorte editie.

Drs. D. K. F. Heyt, *Goniometrie A*, onderbouw, 15e druk, f 2.35, *Goniometrie B*, bovenbouw, 15e druk f 3.90, P. Noordhoff, Groningen.

Drs. D. K. F Heyt en C. P. van Nieuwkasteele, *Nieuwe Schoolalgebra*, 24e druk, f 5.10, P. Noordhoff, Groningen.

E. Inglestam en Stig Sjoberg, *Elphyma Tables*. Tables, Formulas and Nomograms within mathematics, physics, electricity, John Wiley & Sons, New York, 27/—.

Dr. Th. G. D. Stoelinga en Dr. M. van Tol, *Stereometrie en tekencahier*, 5e druk, resp. 159 en 29 blz. Prijs samen f 6.20, cahier alleen f 1.45, W. E. J. Tjeenk Willink, Zwolle.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. Bottema

Delft

LXVI *De snelheid bij de beweging van Kepler.*

In dit tijdschrift heeft C. W. Dornseiffen [1]) aandacht gevraagd voor een van E. T. Whittaker afkomstige stelling met de volgende inhoud: Indien een stoffelijk punt A beweegt onder invloed van een naar een vast centrum O gerichte kracht, die omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand OA, dan is zijn snelheid gelijk aan de som van twee vectoren, beide met een *constante* scalaire waarde; de ene staat loodrecht op de voerstraal OP, de andere heeft ook een constante *richting*, namelijk loodrecht op de lange as van de baankegelsnede K.

Het komt ons voor dat deze uitspraak doorzichtiger wordt door een beschouwing van de *hodograaf* van de Keplerbeweging, uit een eigenschap waarvan zij onmiddellijk volgt. Onder de hodograaf verstaat men, zoals bekend, de meetkundige plaats van de uiteinden der snelheidsvectoren van een bewegend punt als deze naar een vast beginpunt P worden overgebracht; zij is een polair diagram van het snelheidsverloop naar richting en grootte.

Kiest men O als oorsprong van het rechthoekig assenstelsel OXY, is $OA = r$ en $\angle XOA = \varphi$, dan is de op A werkende kracht per massa-eenheid gelijk aan μr^{-2}, waarin μ een constante is. De bewegingsvergelijkingen zijn dus

$$\ddot{x} = -\mu r^{-2} \cos\varphi, \quad \ddot{y} = -\mu r^{-2} \sin\varphi \tag{1}$$

Is voorts p het dubbele van de (constante) perksnelheid, dan is

$$r^2\dot{\varphi} = p \tag{2}$$

zodat men heeft

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{p}\dot{\varphi}\cos\varphi; \quad \ddot{y} = -\frac{\mu}{p}\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{3}$$

---

[1]) C. W. Dornseiffen, De stelling van Whittaker voor een Keplerse beweging. Euclides **42**, II, 43-47 (1966).

waaruit door integratie volgt

$$\dot{x} = -\frac{\mu}{p}\sin\varphi + c_1, \dot{y} = \frac{\mu}{p}\cos\varphi + c_2 \tag{4}$$

waarbij c_1 en c_2 integratieconstanten zijn. Men heeft dus

$$(\dot{x}-c_1)^2 + (\dot{y}-c_2)^2 = \frac{\mu^2}{p^2} \tag{5}$$

of wel de bekende eigenschap [2]): *de hodograaf van een Keplerbeweging is een cirkel.* Is $c_1 = c_2 = 0$ dan valt P samen met het middelpunt M van de cirkel, de snelheid heeft dan een constante grootte en K is een cirkel. In het algemeen ligt P *excentrisch* ten opzichte van de hodograaf en men gaat gemakkelijk na dat P binnen, op of buiten de cirkel ligt al naar gelang K een ellips, een parabool of een hyperbool is. Uit fig. 1, waarin het eerste geval is getekend,

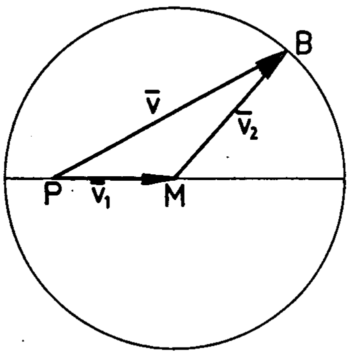


Fig. 1.

leest men onmiddellijk de gevraagde stelling af. Immers men heeft $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$ waarin $\bar{v}_1 = \overline{PM}$ en $\bar{v}_2 = \overline{MB}$ is. Beide componenten hebben een constante grootte en wel resp. $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ en μ/p. De richting van $\bar{v}_1$ is constant en daar zij samenvalt met die van de maximale snelheid staat zij loodrecht op de lange as van K. De richting van $\bar{v}_2$ is variabel, maar zij staat loodrecht op de raaklijn in B aan de hodograaf, dus loodrecht op de versnelling (om de eenvoudige reden dat deze de fluxie van de snelheid is), dus loodrecht op de krachtrichting, dus loodrecht op de voerstraal OP. Daarmee zijn de uitspraken van Whittaker [2]) teruggevonden.

[1]) A. Sommerfeld, Vorlesungen über Theoretische Physik. Bnd. I Mechanik, 4. Auflage (Wiesbaden, 1949), S. 38-42, 233, 249—250.

[2]) E. T. Whittaker, A Treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies, 4th ed. (New York, 1944), 89.

Door geheel op poolcoördinaten over te gaan, kan men uit (4) gemakkelijk de baan bepalen. Men vindt dan voor K:

$$\frac{p}{r} = \frac{\mu}{p} - c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi \qquad (6)$$

welke vergelijking een kegelsnede voorstelt met excentriciteit

$$\varepsilon = \frac{p}{\mu} \sqrt{c_1^2 + c_2^2},$$

welk getal dus inderdaad gelijk is aan de verhouding der lengten van $\bar{v}_1$ en $\bar{v}_2$.

Het is wel duidelijk dat het bewijs van de door Dornseiffen gegeven *omkering* van de stelling, de uitspraak namelijk dat de genoemde eigenschappen karakteristiek zijn voor de Keplerbeweging, in het licht van bovenstaande opmerkingen aanmerkelijk kan worden vereenvoudigd. Als $\bar{v}$ geschreven kan worden als de som van $\bar{v}_1$ en $\bar{v}_2$, waarbij $\bar{v}_1$ in richting en grootte constant is en $\bar{v}_2$ in grootte constant, dan volgt daaruit dat de hodograaf een cirkel is en dat de vergelijkingen (4) gelden. Daardoor alleen is de Keplerbeweging nog niet gekarakteriseerd: men kan gemakkelijk een tegenvoorbeeld geven. Voegt men nog toe de voorwaarde dat $\bar{v}_2$ loodrecht staat op OA dan wil dat zeggen dat de versnelling-vector, dus de kracht, een werklijn heeft die door O gaat. De kracht is dus centraal, daaruit volgt de perkenwet en die is voldoende om uit (4) tot (6) te concluderen.

OPENINGSTOESPRAAK VAN DE VOORZITTER VAN WIMECOS, Dr. Ir. B. GROENEVELD OP DE ALGEMENE VERGADERING VAN 28 DECEMBER 1966

Dames en Heren,

Op deze algemene vergadering heet ik u allen van harte welkom. In het bijzonder noem ik: de ereleden P. Wijdenes en Dr. Joh. H. Wansink, de inspecteurs Dr. D. N. van der Neut en Drs. B. J. Westerhof, de heer Dr. J. J. van Hercke, inspecteur bij de organisatie der studies, belast met de hervorming van het onderwijs in België, de vertegenwoordigers van andere verenigingen Dr. Th. Korthagen (Liwenagel), Drs. A. J. G. Bartels (Velines) en Drs. H. C. Vernout (Wiskunde Werkgroep W.V.O.), de vertegenwoor-

diger van de redactie van Euclides Drs. A. M. Koldijk, de sprekers Prof. Dr. J. H. de Boer en de heer W. J. Kniep.

In het achter ons liggende verenigingsjaar constateren we duidelijk een gevoel van gespannenheid, veroorzaakt door de onzekerheid, waarin ons gehele onderwijs en in het bijzonder ons wiskundeonderwijs verkeert. Deze onzekerheid wordt veroorzaakt door het ontbreken van vastomlijnde programma's voor de diverse vakken als binnen korte tijd de mammoetwet in werking zal treden.

Als de brugklasse in 1968 zal worden gevormd — dit jaartal is aan twijfel onderhevig — dan willen wij, docenten, weten waar we aan toe zijn. Er zijn in allerlei commissies en werkgroepen plannen gemaakt voor nieuwe programma's. Wij rekenen op een tijdige beslissing van hogerhand over de definitieve programma's bij V.W.O. en H.A.V.O.

Wij hebben de indruk dat er in dit opzicht van de hiervoor verantwoordelijke functionarissen een grote stuwkracht uitgaat. Uit eigen ervaring weten we, dat het opstellen van een gemoderniseerd programma moeilijk is. Eén van de moeilijkheden is de haalbaarheid van de voorgestelde onderwerpen, vooral in didactisch opzicht. Ook is het al of niet wenselijk zijn van bepaalde onderwerpen op het programma dikwijls een vrijwel onoplosbaar probleem, temeer daar de deskundigen elkaar in dit opzicht soms zo tegenspreken.

De Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (C.M.L.W.) is voortgegaan met haar experimenten Algebra, Analyse en Meetkunde met vectoren voor de bovenbouw en de gewone Meetkunde voor de onderbouw. Het in de vorige cursus aan enkele scholen doorgewerkte eerste deel van de meetkundecursus voor de onderbouw, die berust op transformaties, heeft veel kritiek gehad. Ten dele was deze kritiek juist en daardoor opbouwend, maar ook kwam veel kritiek voort uit de onbekendheid met de materie en het niet verantwoord achten van totaal afwijkende wegen, die werden gevolgd. Een feit is zeker, dat aansluitingsmoeilijkheden voorkomen. Dit cursusjaar is het experiment ook tot de tweede klasse doorgedrongen. Doordat het daarvoor bestemde boek slechts ten dele uitgekomen is, is een juist oordeel nog niet te geven. De reeds gepresenteerde leerstof voor het tweede jaar ziet er aantrekkelijk uit. Een verheugend feit is, dat menig wiskundeleraar zich met hart en ziel met deze experimenten bezig houdt.

Twee bestuursleden van onze vereniging hebben zitting genomen in een werkgroep van de C.M.L.W., speciaal belast met het samenstellen van de modernisering van de wiskunde in de 2e en 3e klassen van het HAVO.

Deze werkgroep staat onder leiding van inspecteur Westerhof. We rekenen er op, dat op korte termijn een discussie-nota aan de Commissie zal worden aangeboden.

Iets later dan door de uitgever verwacht werd, is het boekje „*Examenopgaven wiskunde voor havo*" uitgekomen. Het verheugt de leden van de WIMECOS-commissie, die met de samenstelling van dit werkje belast waren, dat blijkens de grote aftrek in een behoefte is voorzien. Reeds het volgend jaar kan een herdruk tegemoet worden gezien. Zolang de gemoderniseerde programma's niet tot het havo zijn doorgedrongen, zal het boekje een bron van gegevens bevatten voor de toekomstige havo-eindexamenkandidaten.

Van de heroriënteringscursussen, onder verantwoording van de C.M.L.W. heeft de reeds in Eindhoven gehouden cursus het beoogde doel weer bereikt. De vakantiecursus van het M.C. is dit jaar wegens de afwezigheid van veel sprekers, tengevolge van het Mathematisch Congres te Moskou, alleen in Amsterdam gehouden. De gehele cursus is gegeven door Prof. N. G. de Bruyn uit Eindhoven.

Op het Colloquium, georganiseerd door het M.C., worden dit jaar onderwerpen uit de topologie behandeld. Er is een zo grote belangstelling van de zijde van de wiskundeleraren, dat dit Colloquium als een onmisbare instelling mag gelden.

Veel dank is aan het Mathematisch Centrum verschuldigd voor deze dienst, bewezen aan het wiskundeonderwijs in Nederland.

Op 2 november 1966 vond de WIMECOS-excursie naar de T.H. in Twente plaats. De dag is op zeer aangename wijze verlopen. Een prettige ontvangst, goede lezingen, waarvan vooral de voordracht van Prof. van Spiegel mag worden genoemd, en een interessante rondleiding over het terrein maakten van deze excursiedag iets goeds. De kwesties rond het baccalaureaat werden boeiend uiteengezet door Prof. Breedveld. Het aantal deelnemers bedroeg 65. Hoewel dat slechts 10 % van alle leden van onze vereniging is, hoopt het bestuur toch het organiseren van dergelijke excursies voort te zetten.

De verleden jaar als novum georganiseerde excursie naar Philips trok meer belangstelling.

Het komt ons wenselijk voor, evenals vier jaar geleden, weer een ledenwerf-actie te houden. De groei van ons ledental is zonder onze stimulans blijkbaar te gering. Er zijn vele wiskunde-leraren, die geen lid van onze vereniging zijn.

Veel dank is weer verschuldigd aan allen die betrokken zijn geweest bij de perfecte organisatie van de Wiskunde-Olympiade. De

opgaven voor de eerste ronde waren onzes inziens aan de zware kant, hetgeen teveel teleurstelling heeft veroorzaakt.

We hebben al meer opgemerkt, dat een grotere variatie in de moeilijkheidsgraad een verbetering zou zijn.

Ook de redacteuren van „*Pythagoras*" hebben onze grote waardering voor het prachtige werk, dat ze verzetten. Onze indruk is, dat het aantal lezers stabiel is.

De eindexamenopgaven van dit jaar hebben enige deining veroorzaakt door het zet-duiveltje. Een en ander is aanleiding voor het bestuur geweest een brief te schrijven naar de inspectie. Daarin is onder meer opgemerkt, dat we het examenwerk als geheel bijzonder goed vonden.

Geen beslissing hebben we gekregen op onze vraag of het gebruik van een radialentabel verplicht kan worden gesteld.

Het 16e congres van leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen is op 18 april 1966 te Utrecht gehouden. Wimecos heeft samen met de zuster-verenigingen tot de organisatie bijgedragen. Het thema luidde: „*De wetenschappelijke basis van de leraren-opleiding mede in verband met de exacte wetenschappen in de 20ste eeuw.*" De algemene voordrachten werden gehouden door professor Freudenthal en professor Ubbink. De wiskundevoordrachten werden verzorgd door professor Monna en professor Hamaker resp. „*Over de oneindig kleine en de oneindig grote getallen*" en „*Grepen uit de toegepaste statistiek.*" De belangstelling was goed.

Ik wil eindigen met een afscheidswoord gericht tot ons aftredend bestuurslid, de heer Hufferman. U heeft in de lange reeks van jaren dat u deel uitmaakte van ons bestuur zich steeds getoond als iemand, die alles wat ons onderwijs betreft zeer ter harte gaat. Uw heldere oordeel, uw bescheidenheid en uw toewijding zullen ons steeds in herinnering blijven. Veel tijd en moeite heeft u aan de vereniging gegeven, vooral tijdens uw secretariaatswerkzaamheden. Ook na de overdracht van uw functie als secretaris heeft u veel voor onze vereniging betekend. Uw aanwezigheid op de bestuursvergaderingen was steeds voor ieder een prettige ervaring. We rekenen erop, dat we u nog vele keren zullen ontmoeten in en buiten de vereniging.

Ik hoop, dat deze dag bij u allen een goede herinnering zal nalaten en verklaar hierbij de algemene ledenvergadering voor geopend.

KORREL CXXXVIII

Het kan ook goed

Gegeven zijn de ellips met vergelijking $4x^2 + 9y^2 = 36$, de rechte a met vergelijking $2x + 9y = 18$, het punt $A(5, 0)$. P is een punt van de rechte a, p is poollijn van P ten opzichte van de ellips, n is de loodlijn door de oorsprong op p, v is de rechte AP, S is gemeenschappelijk punt van n en v.

Gevraagd wordt de verzameling van de punten S.

Het punt P wordt voorgesteld door $(9\alpha, 2 - 2\alpha)$, waarin α een vrije parameter is.

Voor elke waarde van α stelt $2\alpha x + (1 - \alpha)y = 2$ de rechte p voor.

Indien $\alpha \neq 1$ is, dan heeft p de richtingscoëfficient $\dfrac{2\alpha}{\alpha - 1}$. Indien dan ook nog $\alpha \neq 0$ is, dan heeft elke loodlijn op p de richtingscoëfficient $-\dfrac{\alpha - 1}{2\alpha}$. De vergelijking van n luidt onder de gemaakte veronderstellingen $y = -\dfrac{\alpha - 1}{2\alpha}x$ of $(\alpha - 1)x + 2\alpha y = 0$. Deze laatste vergelijking stelt de rechte n ook nog voor indien $\alpha = 1$ of $\alpha = 0$.

Indien $\alpha \neq \frac{5}{9}$ is, dan heeft v de richtingscoëfficiënt $\dfrac{2 - 2\alpha}{9\alpha - 5}$. De vergelijking van v luidt onder de gemaakte veronderstelling $y = \dfrac{2 - 2\alpha}{9\alpha - 5}(x - 5)$ of $(2\alpha - 2)(x - 5) + (9\alpha - 5)\,y = 0$. Deze laatste vergelijking stelt de rechte v ook nog voor indien $\alpha = \frac{5}{9}$.

We schrijven de gevonden algemene vergelijkingen van n en v nu eerst als $\alpha(x + 2y) = x$ en $\alpha(2x + 9y - 10) = 2x + 5y - 10$. De coördinaten van een punt S en de bijbehorende waarde van α voldoen aan deze beide vergelijkingen.

1°) Uit de eerste vergelijking van dit stel blijkt, dat een op de rechte $x + 2y = 0$ gelegen punt S geen ander punt dan de oorsprong $(0, 0)$ kan zijn. De tweede vergelijking van het stel levert, dat $(0, 0)$ inderdaad een punt S is: de bijbehorende waarde van α is 1.

2°) De coördinaten van een buiten de rechte $x + 2y = 0$ gelegen punt S voldoen aan $\dfrac{x}{x + 2y}(2x + 9y - 10) = 2x + 5y - 10$,

dus ook aan $x(2x + 9y - 10) = (x + 2y)(2x + 5y - 10)$ of $y(y - 2) = 0$.

Op grond hiervan moeten we de volgende punten als kandidaat-S beschouwen:

a) de punten van de x-as, behalve diens snijpunt $(0, 0)$ met de rechte $x + 2y = 0$;

b) de punten van de rechte $y = 2$, behalve diens snijpunt $(-4, 2)$ met de rechte $x + 2y = 0$.

Is omgekeerd (x_0, y_0) zulk een kandidaat en kiezen we α zo, dat aan $\alpha(x_0 + 2y_0) = x_0$ voldaan is, dan voldoen α, x_0, y_0 aan de twee gevonden algemene vergelijkingen. Elke kandidaat-S is dus inderdaad een S.

Samenvattend komen we tot de conclusie, dat de gevraagde verzameling de vereniging is van de x-as met de in $(-4, 2)$ geperforeerde rechte $y = 2$.

In het bovenstaande is de parameter α met de substitutie-methode geëlimineerd. Zijn beide vergelijkingen lineair in α, dan geeft de methode van gelijkstelling een iets gaver resultaat. Niet alleen is het dan wat meer doorzichtig, dat de in 2°) gevolgde weg ook in de tegengestelde richting begaanbaar is, maar bovendien krijgt men dan gemakkelijker door welk deel van de gevonden verzameling een zogenaamd „ontaard deel" is.

's-Gravenhage A. F. van Tooren

BOEKBESPREKING

Dr. J. H. Wansink, *Didactische Oriëntatie voor wiskundeleraren*, Deel I, 1e druk, *f* 14.90, (J. B. Wolters, Groningen).

Aan het voorwoord ontleen ik dat dit boek is ontstaan uit gegeven colleges in de didactiek aan de T.H. te Delft en aan leergangen in verschillende steden. Vooral aan deze laatste instituten is het ontbreken van enig leerboek voelbaar. Het verschijnen van dit boek beproeft daarin te voorzien, zonder dat het pretendeert een systematisch leerboek voor de didactiek der wiskunde te zijn. Integendeel: de auteur leidt het in als te zijn „fragmentarisch van karakter" en „niet strevend naar volledigheid"; inderdaad krijgt men de indruk van een verzameling opstellen in los verband. Voor de pedagogische en didactische voorbereiding op het examen MO-A. acht Wansink het boek voldoende; het is dus voornamelijk bestemd voor wiskunde-docenten aan ULO (Mavo)-scholen; voor de bovenbouw VHMO (VWO) zal deel II nodig zijn. Het boek is voorzien van uitgebreide literatuurlijsten.

Aan dit voorwoord voeg ik toe de titels der hoofdstukken.

1. Over de leraar en zijn werk
2. Schoolorganisatie in Nederland
3. Het leerplan der wiskunde

4. De taal der wiskunde; logische aspecten; verzamelingenleer
5. Dril en inzicht; lesmethoden
6. Toetsingsproblemen
7. De stellingen van Pythagoras.

Het kan niet de bedoeling zijn het werk aan een uitvoerige bespreking te onderwerpen; ik zou dan ook aan het fragmentarisch karakter van het boek het recht willen ontlenen de bespreking eveneens fragmentarisch te doen zijn.

Als de auteur zegt, dat deze stof toereikend is voor MO-A kandidaten, geloof ik hem graag. Ik hoop dat deze kandidaten het goed gebruiken; d.w.z. als *lees*boek en als *studie*boek; vooral niet als *leer*boek. Daarvoor is het veel te mooi. Het boek leest prettig. In het bijzonder boeiden mij de hoofdstukken 4 en 5; zij bevatten tal van goede voorbeelden en aanwijzingen, die ook ervaren leraren zullen aanspreken. Het zou mij niet verbazen, als de man voor de klas er nog meer in vindt dan de man, die nog voor de klas moet komen. Speciaal frappeerden mij in:

a. Hoofdstuk 4: de paragrafen over taalfouten in wiskundewerk, samengestelde oordelen, het gebruik van „of", leerlingenfouten, toepassing van venn-diagrammen.

b. Hoofdstuk 5: de paragrafen over epistemisch onderwijs, de heuristische methode.

c. Hoofdstuk 6: die over de betekenis van het cijfer 6, de functies der schoolcijfers en de bespreking van een proefwerk. De hospitant, die de moed had gehad, zich dezer dagen aan mijn „mentorale" zorgen toe te vertrouwen, heeft deze besprekingsmethode voor een door hem opgesteld proefwerk meteen toegepast; wij haalden er inderdaad feilloos uit, dat het proefwerk goed was geweest. Het gebruikte overzichtschema der resultaten wees uit, dat alle vraagstukken even zwaar waren; de volgorde was dus goed, maar permuteerbaar en *alle* vraagstukken moesten worden besproken.... Het proefwerk dat Wansink op pag. 217/218 geeft, heeft mij met de ogen doen knipperen en mij met bescheidenheid vervuld. Kunnen de betrokkenen dit aan in de derde week van het eerste schooljaar met deze resultaten en in deze hoeveelheid? De aarzeling, waarmee ik mijn gelukwensen uitspreek, zie men dan als een — naar ik hoop aanvaardbare — jalousie de métier.

Het boek heeft een prijzenswaardig hoge graad van objectiviteit; de auteur vermeldt feiten en ervaringen, nuchter zoals men dat van hem verwachtte; zijn persoonlijke visie op de ontwikkeling van schoolwezen en wiskundeleerplan komt niet vaak om de hoek kijken; hier en daar voelt men die visie meer dan dat men die uit de tekst ervaart. Wat mij betreft, had die visie wel duidelijker uitgesproken mogen zijn, voor de niet meer studerende zou dat winst hebben betekend, voor de student niet, het is bedoeld als leerboek.

Het hoofdstuk over Pythagoras — hoe aardig ook — lijkt mij overbodig; hier wordt mogelijk een concessie gedaan aan de bewering, dat aan de toekomstige leraar „de betekenis van de leerstof ook uit cultureel-historisch oogpunt duidelijk moet zijn". Of de MO-A kandidaten ook van dit hoofdstuk op de hoogte moeten zijn? Ik hoop van niet.

Tenslotte heb ik opgestoken dat van mij als wiskundeleraar wordt verwacht, dat ik leiding geef bij de voorbereiding op de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Van dit nuttig evenement geen woord kwaad! Maar moeten we daarop gaan voorbereiden? Ik heb begrepen — wellicht ten onrechte — dat „voorbereiding op" achterwege diende te blijven.

De auteur moge uit deze fragmentarische bespreking concluderen, dat ik het boek echt gelezen heb. Hij moge daaraan toevoegen, dat ik het met bijzonder genoegen heb gelezen. Ik hoop dat genoegen met velen te mogen delen. Een MO-A diploma

behoef ik niet meer te halen; het genoegen is derhalve onverdeeld. Dit wil niet zeggen, dat dit genoegen de examinandus niet zou zijn gegeven. Ik dacht, dat hij er veel aan zou hebben.

Groenman

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

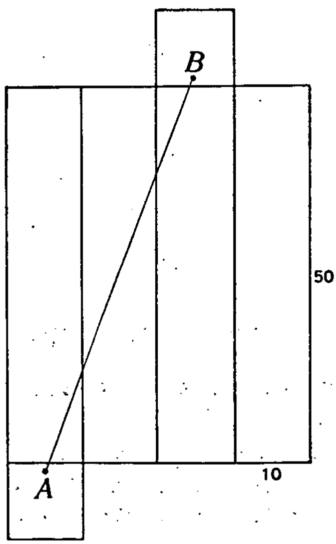
171. Een vierkant bord is verdeeld in $(2n)^2$ congruente vierkante velden. Op hoeveel verschillende manieren kan men twee van deze velden kiezen? Twee manieren worden als hetzelfde beschouwd, als het ene paar gekozen velden in het andere kan overgaan door een van de acht rotaties en spiegelingen, die het bord in zichzelf doen overgaan. (B. Kootstra)

172. U kent allen de aftelversjes, zoals: olleke bolleke ruben solleke, olleke bolleke knol. Welnu, enige kinderen staan in een kring. Een van hen telt af. Het aftelversje is heel eenvoudig; het bestaat alleen uit olleke bolleke knol. Elke derde valt dus af. Het kind, dat aftelt, begint bij zichzelf te tellen en blijft ten slotte alleen over. Hoeveel kinderen stonden er in de kring?

OPLOSSINGEN

168. Een draad van 56 m moet gelegd worden van een punt in de voorwand van een fabriekshal (1 m boven de vloer in het midden) naar een punt in de achterwand (1 m onder de zoldering in het midden). Afmetingen hal $50 \times 10 \times 10$ m.

Maak een netwerk van de fabriekshal op onderstaande manier. In dit netwerk is de afstand van A tot B gelijk aan $\sqrt{(52^2 + 20^2)}$ m. Dit is minder dan 56 m. We slagen er dus in de draad te leggen, door hem te laten lopen langs resp. de voorwand, de vloer, een zijwand, de zoldering en de achterwand.



169. Een telefoonnet heeft n abonnees. Op een bepaald ogenblik zijn een aantal paren met elkaar in gesprek. Op hoeveel manieren is dit mogelijk?

Noem het aantal manieren p_n. Kies uit de n abonnees er 1 uit. Het kan zijn, dat deze niet in gesprek is. In dat geval zijn er nog p_{n-1} manieren, waarop de overige $n - 1$ abonnees wel of niet met elkaar in gesprek zijn.

Het kan ook zijn, dat de uitgekozene wel in gesprek is, en wel met abonnee A. De overige $n - 2$ abonnees kunnen dan nog op p_{n-2} manieren wel of niet met elkaar in gesprek zijn. Voor abonnee A kunnen $n - 1$ verschillende abonnees gekozen worden. In totaal levert dit dus $(n - 1)p_{n-2}$ manieren.

Conclusie:

$$p_n = p_{n-1} + (n - 1)p_{n-2}.$$

We weten, dat $p_1 = 1$ en $p_2 = 2$. Voor elke n kan nu p_n berekend worden.

170. Gevraagd werd het kleinste getal, dat gelijk is aan 5 (mod 9), aan 10 (mod 19) en aan 12 (mod 23).

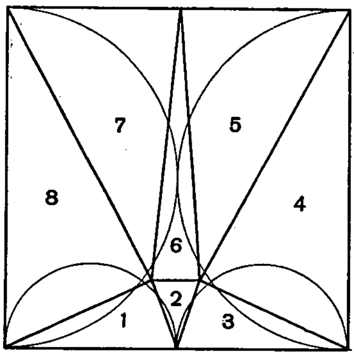
Vermenigvuldig dit getal met 2. We krijgen dan een getal, dat gelijk is aan 1 (mod 9), aan 1 (mod 19) en aan 1 (mod 23). Het kleinste getal, dat hieraan gelijk is, is

$$9 \cdot 19 \cdot 23 + 1.$$

Het gevraagde getal is dus

$$\tfrac{1}{2}(9 \cdot 19 \cdot 23 + 1) = 1967.$$

Ad 165. Van verschillende kanten ontving ik de volgende methode om een vierkant in acht scherphoekige driehoeken te verdelen:



Mijn dank aan de inzenders voor deze verbetering.

BOEKBESPREKING

P. Wijdenes, *Analytische meetkunde voor het V.H.M.O.*, P. Noordhoff N.V., Groningen, 92 blz., ƒ 3.25.

In kort bestek vindt men alle theorie, begeleid met opgaven, nodig voor hen die zich voorbereiden op het eindexamen V.H.M.O. of de akte wiskunde L.O.

De behandeling is zodanig, dat men daaruit de auteur zonder aarzeling herkent.

Burgers